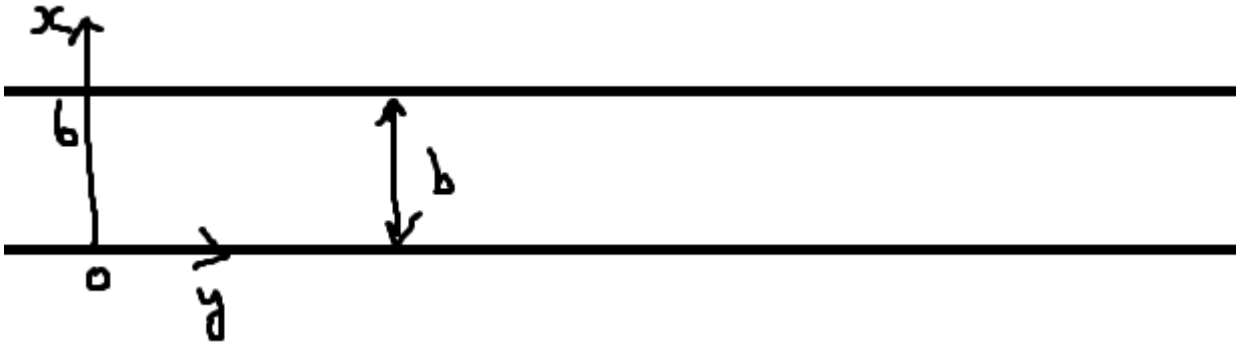
16. Приведите пример постановки парциальных условий излучения.

Рассмотрим плоский волновод, в 2D, заземлённый на нижней и верхней границах:



$$u(x,0)=0,\ u(x,b)=0,\ x\in\mathbb{R}^1.$$

То есть на верхней и нижней границах все напряжённости и индукции будут 0.

Поле в нём удовлетворяет уравнению Гельмгольца, и т.к. источников нет – ОДНОРОДНОМУ уравнению Гельмгольца. Вот этому:

$$\Delta u+k^2u=0.$$

Будем искать решения в виде нормальных волн. Что это такое?
Нормальными волнами или модами называются решения вида

$$u(x,y)=e^{i\gamma x}\psi(y),$$

где γ - *постоянная распространения*, $\psi(y)$ - *функция сечения*.

Как вы понимаете, в общем случае решение раскладывается по нормальным волнам.

Если γ действительно, то это просто волновое число. Если оно комплексное, то в зависимости от знака мнимой части будет или экспоненциальный рост, или экспоненциальное затухание. Ну рост вообще невозможен, если только это не активная среда, экспоненциальное затухание нам тоже будет не особо интересно, так что будем считать k действительным числом.

Подставим нормальную волну в уравнение Гельмгольца. С учётом ГУ получим задачу Ш-Л для функции сечения:

$$\begin{cases}\psi''(y)+\lambda\psi(y)=0, & 0<y<b,\\ \psi(0)=0,\ \psi(b)=0.\end{cases}$$

$$\text{где } \lambda=\gamma^2-k^2.$$

λ – СЗ, а не длина волны!!!

Т.к. сечение в нашей задаче является отрезком, то ЗШЛ у нас на отрезке.
Если бы волновод был 3Dшным и имел бы прямоугольное сечение, то ЗШЛ

была бы в прямоугольнике. Был бы он круглым – были бы функция Бесселя… а у нас отрезок, поэтому просто синусы:

$$\psi_n(y) = \sqrt{\frac{2}{b}} \sin \frac{\pi n y}{b}, \quad \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3...$$

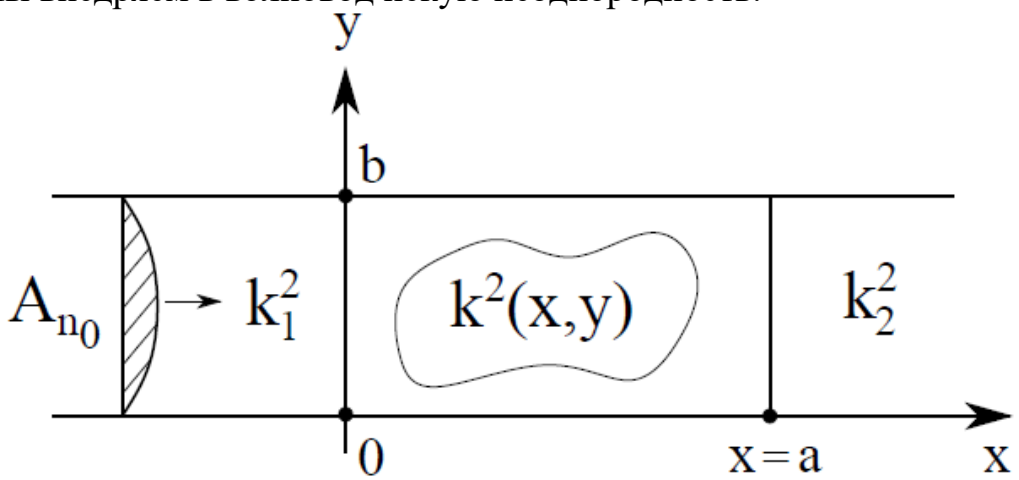
Таким образом, существует счетное множество нормальных волн (мод) вида:

$$u_n(x, y) = e^{i\gamma_n x} \psi_n(y), \quad \gamma_n = \sqrt{k^2 - \lambda_n} \quad (n = 1, 2, 3...)$$

Т.е. хорошо по волноводу будут проходить не все сигналы, а лишь на некоторых частотах.
В частности, если k^2 окажется меньше λ_1 (первого СЗ сечения), то γ_1 (а тем более остальные γ) окажутся мнимыми, и такие волны будут затухать. Т.е. минимальное волновое число (оно прямо пропорционально частоте), при котором возможен процесс передачи информации через волновод – $\lambda_1^{\ 2}$ – это так называемая частота (или волновое число) отсечки.

Кстати, Боголюбов не отвечает на вопрос: а что будет, если мы попытаемся пропустить через волновод волну с волновым числом, не соответствующим ни одному СЗ, хоть и больше волнового числа отсечки. Ответ: внутри волновода будет дифракция, и на выходе мы получим что-то, не имеющего никакое отношения к тому, что было на входе. Поэтому имеет смысл рассматривать исключительно моды $\Psi(y)\exp(i\gamma_m x)$, ведь там после домножения на $\exp(-i\omega t)$ возникнет просто бегущая волна, которая бережно сохраняет функцию сечения $\Psi(y)$, несущую информацию, и адресат получит ровно то, что отправил отправитель, а не абракадабру.

А теперь, когда мы уже поняли, что у волновода есть некоторые моды, Решим следующую задачу:
Мы внедряем в волновод некую неоднородность:



Например, небольшое локальное вкрапление материала с иной диэлектрической проницаемостью.
На неоднорость слева падает волна моды номера n и амплитуды A_n , и нам интересно, что с ней будет после прохождения неоднородности.

И тут, как говорит Боголюбов, часто вещи, очевидные физикам, плохо перекладываются на язык математики, и наоборот. Как нам написать вот такие ГУ на левую и правую стенки:
Что слева падает волна ТОЛЬКО моды n,
А справа не неоднородность не падают волны вообще
(при этом выходить они могут как угодно)

Не очевидно, да? Это должны быть какие-то очень хитрые ГУ! Ни Дирихле, ни Нейман, а что-то прям… прям ☺ Они как раз и называются парциальными условиями. Их придумал Свешников. Вот это ГУ слева:

$$\int_0^b \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + i\gamma_n^{(1)} u \right\}_{x=0} \cdot \ \psi_n(y)\mathrm{d}y = 2i\gamma_{n_0}^{(1)} A_{n_0} \cdot \delta_{nn_0},$$

А это ГУ справа:

$$\int_0^b \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} - i\gamma_n^{(2)} u \right\}_{x=a} \cdot \ \psi_n(y)\mathrm{d}y = 0, \ \ (n = 1, 2, 3...)$$

Тут фишка в том, что если мы возьмём нормальную воду №m $\Psi(y)\exp(i\gamma_m x)$, продифференцируем её по x и вычтем её же, домноженную на $i\gamma_n$, то получим 0, если m=n, и не ноль в ином случае.
Но в таком виде (где это вы видели ГУ в виде интегралов?!) с ними работать очень неудобно. Гораздо проще представить, что исходная волна раскладывается по модам волновода

$$u_n(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} Z_n(x)\psi_n(y),$$

$$Z_n(x) = \int_0^b u(x, y)\psi_n(y)\mathrm{d}y, \ \ (n = 1, 2, 3...).$$

Тогда ГУ слева запишется как

$$Z_n'(0) + i\gamma_n^{(1)} Z_n(0) = 2i\gamma_{n_0}^{(1)} A_{n_0}\delta_{nn_0}.$$

А справа – то же самое, но в правой части будет просто ноль.
Отсюда и название «парциальные» - условия накладываются на коэф-ты разложения.

В заключение Боголюбов доказывает теорему о том, что именно эти парциальные ГУ помогают сделать решение единственным.